第 23 卷　第 3 期　　中国管理科学　　Vol. 23，No. 3
2015 年　3 月　　Chinese Journal of Management Science　　Mar.，　2015

文章编号：1003－207(2015)03－0042－05
DOI：10.16381/j.cnki.issn1003－207x.2015.03.005

待遇预定制养老基金资产组合与缴费计划最优决策

——基于随机波动率 Heston 模型及 Legendre 对偶变换法

肖建武[1]，尹希明[2]

（1. 中南林业科技大学商学院，湖南 长沙　410004；2. 上海交通大学数学系，上海　200240）

摘　要：待遇预定制养老金制度在中国应用非常广泛，缴费制定和资产配置是此类养老金管理的两大核心问题。由此，面对随机波动的现实市场，文章针对待遇预定制养老基金的资产组合管理问题，应用最优控制理论，选用对数效用函数，建立 Heston 随机波动率模型；在难以求解随机微分 Bellman 方程的情况下，应用 Legendre 变换，将原来问题转化为对偶问题，从而求得原问题的解析解。在理论上，进一步丰富了资产组合问题的随机最优控制模型的构建和随机微分方程的求解理论。在实践上，确定了养老金管理风险资产配置比例和缴费水平，给出了最优决策与总资产、发放待遇、净资产与风险溢价之间的数量关系，从而实现养老基金管理的最优资产配置和最低缴费水平的效用目标。

关键词：待遇预定制养老金；资产组合；随机波动率；Heston 模型；Legendre 变换

中图分类号：F224.11　　**文献标识码**：A

1　引言

养老金制度是为社会成员提供养老金的社会化制度安排，分为两种基本类型：(1)待遇预定计划(DB，Defined Benefit Plan)，即预先规定退休后的养老金水平，缴费水平需经过精算估计；(2)缴费预定计划(DC，Defined Contribution Plan)，即预先确定缴费水平，退休后以缴费和投资收益为基础发放养老金。那么，缴费制定和资产组合便成了 DB 计划养老金管理的两大核心问题[1]。国内外有大量文献针对养老基金的资产组合、缴费和待遇发放等资金管理问题进行了研究，相对来说，更多的研究主要集中于 BC 计划，但也有不少的文献成果针对 DB 计划进行了研究，国外的 Josa-Fombellida 等[2]、Boulier 等[3]、Haberman 等[4－5]分别根据不同市场条件和应用不同随机控制方法研究了待遇预定制养老金的最优投资组合和缴费水平问题；笔者等[6－7]也就待遇预定制养老金的投资缴费问题建立了随机波动率的常方差弹性(CEV)模型，并探讨了数值模拟和 Legendre 变换-对偶解析解法。

在养老基金的资产配置决策中，由于大量不确定性因素影响着投资的收益与方差，所以，实际的投资市场是一个随机波动的市场。如何突破静态的分析方法和常波动率限制，更好地描绘实际金融市场的随机波动性，使资产组合模型能更接近实际问题，其中，具有随机波动率的模型就能较好地描述实际随机金融市场，如 CEV 模型和 Heston 模型。CEV 模型最早由 Cox 和 Ross 提出[8]，考虑了风险资产市场价格因素，能很好地描绘实际市场隐含波动的不对称性(An Implied Volatility Skew)[6－7]。Heston[9]模型最早由 Heston 研究，能较好地反映风险资产收益和方差的随机波动性，在基于风险资产价格服从 Heston 随机波动率条件下，李静[10]、Han Jiguang 等[11]和 Kim 等[12]研究了期权定价问题，Li Zhongfei 等[13]和李艳方等[14]研究了最优投资和再保险问题，林祥和杨益[15]研究了确定 DC 计划养老金的最优投资问题。

应用随机控制求解 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程是一个比较复杂的数学过程，特别是在增加控制量和应用随机波动率的情况下，往往会得到更加复杂的非线性偏微方程，而借助 Legendre 变换将原

收稿日期：2013－01－18；**修订日期**：2013－07－17
基金项目：教育部人文社会科学研究项目(10YJC790296)
作者简介：肖建武(1973－)，男(汉族)，湖南株洲人，中南林业科技大学商学院，教授，博士，硕士生导师，研究方向：投融资管理.

问题转化为对偶问题加以研究分析，可以解决部分模型的求解问题。事实上，在热力学、统计力学和量子论领域应用此类方法的学术工作比较广泛，而在近年中也逐步延伸到了金融投资决策领域。Chaulli 和 Hurd[16]对金融中的 Hellinger 过程应用 Legendre 变换，针对三种效用函数分析了原问题与对偶问题的相互关系以及理论性质；Jonsson 和 Sircar[17]将 Legendre 变换引入到了资产配置和对冲期权问题；笔者也曾在研究[7,18-19]中应用 Legendre 变换探讨了养老基金管理服从常方差弹性(CEV)的随机波动率模型。本文与之前的研究[7,18-19]工作相比，相同的是，都是针对养老基金的管理建立了随机波动率控制模型，可以更好地描绘实际金融市场的随机波动性；另外，都是应用 Legendre 变换和对偶理论探讨最优决策的解析解，从而突破传统随机偏微方程求解难的问题。不同的是，CEV、Heston 分别描述了不同的市场条件和市场过程，本文构建的是 Heston 模型，在风险资产满足 Heston 条件下，研究养老金的管理问题；另外，也进一步研究了 Legendre 变换和对偶理论在更多类型的随机控制模型求解方面的应用。

基于上述的应用背景和理论方法，本工作将针对待遇预定制养老金的管理，采用对数效用函数，建立 Heston 随机波动率模型，结合最优控制理论和 Legendre 变换，将原来问题转化为对偶问题，通过对偶问题的求解，求得原问题的解析解，从而确定风险资产比例 μ 和缴费水平 C。理论上，建立了更加符合实际市场随机变化条件的随机波动率模型，并应用 Legendre 变换克服了复杂的非线性偏微方程的求解过程，达到最优控制决策。应用上，探讨了待遇预定制养老基金的资产组合和缴费问题，满足基金成员获得既定受益条件下缴费最少的社会福利。

2 随机控制模型

2.1 主要假设

考虑待遇预定制养老金的管理，即预先规定退休后的养老金发放水平，基金管理者依靠总缴费和投资收益兑现预先承诺，假设固定发放水平为 P。

在不考虑消费的情形之下，养老基金的资产组合分成风险资产($\mu_t V_t$)和无风险资产($(1-\mu_t)V_t$)。其中，总资产价值记作 V_t，μ_t 表示风险资产所占总资产的比例，两者都是关于时间 t 的函数，剩余部分 $(1-\mu_t)V_t$ 投向无风险资产。

无风险资产收益率假设为常数 $r(r>0)$，常见的如银行储蓄利率或债券利率，则无风险资产在 t 时刻的价格 B_t 满足如下常微分方程：

$$dB_t = rB_t dt \tag{1}$$

风险投资收益是不确定的，金融市场也是随机波动的。为了更好地接近实际随机市场，这里假设风险资产的收益和方差都是随机波动的，采用 Heston 模型描述风险资产在 t 时刻的价格 S_t 和波动 $\sqrt{D_t}$ 满足：

$$dS_t = (r+\lambda D_t)S_t dt + \sqrt{D_t}S_t dW_t \tag{2}$$

其中，W_t 是标准布朗运动，$\lambda>0$ 为常数，D_t 是一个均值回复平方根过程，也称 CIR 过程[9]，满足如下方程：

$$dD_t = k(\theta - D_t)dt + \sigma\sqrt{D_t}dW_t' \tag{3}$$

其中，k,θ,σ 均为正常数，θ 是 D_t 的长期平均值(the Long-Term Mean)，k 是 D_t 的均值回归率(a Mean-Reverting Speed Parameter)，σ 表示 D_t 的波动率(the Volatility of Volatility)，且假设 $2k\theta>\sigma^2$，$D(0)>0$，从而保证 $D_t>0$；W_t' 是标准布朗运动，不妨假设它与 W_t 之间的相关系数为 ρ，即 $(dW_t, dW_t')=\rho dt$。

2.2 最优问题

在待遇预定计划中，养老基金管理者在能保证发放水平的条件下，通过投资收益，尽量降低缴费水平；同时还要考虑到未来价值贴现，也就是要使得累计缴费现值最小，故选择对数效用函数：

$$U = \int_0^\infty e^{-\beta}\ln C_t dt \tag{4}$$

其中，β 表示贴现率，设为常数；C_t 表示在 t 时刻的养老金缴费水平。

定义值函数：

$$H(t,S,V) = \max_{\mu,C}\{E[-U(C)] \mid S_t = S, V_t = V\} \tag{5}$$

所以，待遇预定制养老基金管理的最优问题就可以表述为：在 t 时刻给定风险资产价格 S_t 和总资产价值 V_t 的条件下，确定控制——缴费水平 C_t 和风险资产比例 μ_t，使得负效用期望最大[7]。

3 模型求解

3.1 HJB 方程

考虑到养老基金投资于风险资产与无风险资产，以及缴费与待遇发放，其总资产的价值变化则满足以下微分方程：

$$dV_t = \mu_t V_t \frac{dS_t}{S_t} + (1-\mu_t) V_t \frac{dB_t}{B_t} dt + C_t dt - P dt \tag{6}$$

其中，第一项表示风险资产收益，第二项表示无风险资产收益，第三项表示基金缴费，最后一项表示待遇发放。将无风险资产模型和风险资产 Heston 模型带入式(6)，则有：

$$dV_t = (V_t r + \mu_t V_t \lambda D_t + C_t - P)dt + \mu_t V_t \sqrt{D_t} dW_t \tag{7}$$

对以上最优问题求得关于值函数 $H(t,S,V)$ 的 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)偏微方程：

$$\sup\{\int_{\infty}^{0} -e^{-\beta t}\ln C + (rV + \lambda\mu VD + C - P)H_V + \frac{1}{2}\mu^2 v^2 DH_{VV} + \rho\mu v\sigma DH_{VD} + k(\theta - D)H_D + \frac{1}{2}\sigma^2 DH_{DD}\} + H_t = 0 \tag{8}$$

式中，$H(t,S,V)$ 简单记作 $H, H_t, H_V, H_D, H_{VV}, H_{VD}, H_{DD}$ 分别表示对 t,V,D 的各阶偏导；大括号部分是关于 μ 和 C 的多项式，则最优控制 (μ^*, C^*) 满足：

$$-e^{-\beta t}\frac{1}{C} + H_V = 0$$

$$\lambda H_V + \mu V H_{VV} + \rho\sigma H_{VD} = 0 \tag{9}$$

由此可得：

$$C = e^{-\beta t}\frac{1}{H_V} \tag{10}$$

$$\mu = -\frac{\rho\sigma H_{VD} + \lambda H_V}{V H_{VV}} \tag{11}$$

将(10)和(11)带入(8)得：

$$H_t + \beta t e^{-\beta t} + e^{-\beta t}\ln H_V + rVH_V + e^{-\beta t} - PH_V + k(\theta - D)H_D + \frac{1}{2}\sigma^2 DH_{DD} - \rho\sigma\lambda D\frac{H_{VD}H_V}{H_{VV}} - \frac{1}{2}\lambda^2 D\frac{H_V^2}{H_{VV}} - \frac{1}{2}\rho^2\sigma^2 D\frac{H_{VD}^2}{H_{VV}} = 0 \tag{12}$$

这是一个比较复杂非线性偏微方程，很难采取经典的分离变量法解得直观的解析解，下面将应用 Legendre 变换将其转化为对偶问题，通过对偶问题的求解从而取定原问题的最优控制解。

3.2 对偶问题

定义原问题值函数的对偶函数：

$$\hat{H}(t,S,Z) = \sup_{V>0}\{H(t,S,V) - ZV\} \tag{13}$$

$$g(t,S,Z) = \inf_{V>0}\{V \mid H(t,S,V) \geqslant ZV + \hat{H}(t,S,Z)\} \tag{14}$$

其中，$Z>0$ 表示 V 的对偶变量。

因为两函数存在关系：$g(t,S,Z) = -\hat{H}(t,S,Z)_Z$，所以可以选取 $g(t,S,Z)$ 作为值函数 $H(t,S,V)$ 的对偶函数。应用函数关系：$V = g(t,S,Z)$，$\hat{H}(t,S,Z) = H(t,S,Z) - ZV$，可以得到[16]：

$$H_V = Z, H_t = \hat{H}_t, H_S = \hat{H}_S, H_{VV} = -\frac{1}{\hat{H}_{ZZ}},$$

$$H_{SV} = -\frac{\hat{H}_{SZ}}{\hat{H}_{ZZ}}, H_{SS} = \hat{H}_{SS} - \frac{\hat{H}_{SZ}^2}{\hat{H}_{ZZ}} \tag{15}$$

定义效用函数的对偶函数：

$$\hat{U}(t,Z) = \sup_{C>0}\{U(t,C) - ZC\} \tag{16}$$

$$G(t,Z) = \inf_{C>0}\{C \mid U(C) \geqslant ZC + \hat{U}(t,Z)\} \tag{17}$$

借助 Cox 和 Huang[20] 和 Kramkov 等[21] 的分析，我们容易说明函数 $U(C)$ 和 $U(Z)$ 可以通过 Legendre 变换相互转化：

$$\hat{U}(Z) = \sup_{C>0}\{U(C) - ZC\}, \hat{U}(C) = \inf_{Z>0}\{\hat{U}(Z) + ZC\} \tag{18}$$

按照 $Z = U'(C)$，上式成立的最优值 C^*、Z^* 之间的相互关系为：

$$C^* = -\hat{U}'(Z^*),\ Z^* = U'(C^*) \tag{19}$$

效用函数定义为具有连续导数的严格递增凹函数，那么对偶函数是一个严格递减的凸函数，则原问题可以化为对偶问题：

$$\hat{H}(t,S,Z) = \inf_{Z>0} E\{\hat{U}(Z_T) \mid Z_t = Z\} \tag{20}$$

将(15)代入 HJB 方程(12)得以下偏微方程：

$$e^{-\beta t}(\beta t + 1 + \ln Z) + \hat{H}_t + rVZ - PZ + k(\theta - D)\hat{H}_D + \frac{1}{2}\sigma^2 D\hat{H}_{DD} - \rho\sigma\lambda DZ\hat{H}_{DZ} + \frac{1}{2}\lambda^2 DZ^2\hat{H}_{ZZ} - \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sigma^2 D\frac{\hat{H}_{DZ}^2}{\hat{H}_{ZZ}} = 0 \tag{21}$$

对上式关于 Z 求导，并应用关系式：$g = -\hat{H}_Z$ 和 $g = V$，则得到对偶问题的 HJB 方程：

$$e^{-\beta t}\frac{1}{Z} - g_t + rg - P - k(\theta - D)g_D - \frac{1}{2}\sigma^2 Dg_{DD} + \rho\sigma\lambda Dg_D + \rho\sigma\lambda DZg_{DZ} - \lambda^2 DZg_z - \frac{1}{2}\lambda^2 DZ^2 g_{ZZ} - \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sigma^2 D\frac{g_D^2 g_{ZZ} - 2g_D g_{DZ} g_Z}{g_Z^2} = 0 \tag{22}$$

3.3 方程求解

按照上述 Legendre 变换定义的对偶函数为：

$$G(t,Z) = -e^{-\beta t}\frac{1}{Z}, \hat{U}(t,Z) = e^{-\beta t}(\beta t + \ln Z) \tag{23}$$

所以，对上述偏微方程(22)求可分离变量形式的解：

$$g(t,D,Z) = e^{-\beta t}\frac{1}{Z}f(t) + \varphi(t), \tag{24}$$

满足初始条件：$f(0)=1,\varphi(0)=0$，将其带入式(22)则有：

$$e^{-\beta}\frac{1}{Z}+\beta e^{-\beta}\frac{1}{Z}f(t)+e^{-\beta}\frac{1}{Z}f'(t)+\varphi'(t)+re^{-\beta}\frac{1}{Z}f(t)+r\varphi(t)-P=0 \tag{25}$$

则有：

$$\begin{cases}e^{-\beta}\frac{1}{Z}f'(t)+(\beta+r)e^{-\beta}\frac{1}{Z}f(t)+e^{-\beta}\frac{1}{Z}=0\\ \varphi'(t)+\lambda\varphi(t)-P=0\end{cases} \tag{26}$$

即满足：

$$\begin{cases}f'(t)+(\beta+r)f(t)+1=0\\ f(0)=1\end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases}\varphi'(t)+\gamma\varphi(t)-P=0\\ \varphi(0)=0\end{cases} \tag{28}$$

可得：

$$\begin{cases}f(t)=\frac{1}{\beta+r}+\frac{\beta+r-1}{\beta+r}e^{-(\beta+r)t}\\ \varphi(t)=\frac{P}{r}(1-e^{-rt})\end{cases} \tag{29}$$

即得：

$$g=\frac{1}{(\beta+r)Z}e^{-\beta}[1-(1-\beta-r)e^{-(\beta+r)t}]+\frac{P}{r}(1-e^{-rt}) \tag{30}$$

3.4　最优决策

按照以上推导，风险资产投资比例和缴费水平可以重新表示为：

$$C=e^{-\beta}\frac{1}{H_V}=e^{-\beta}\frac{1}{Z}=\frac{(\beta+r)}{1-(1-\beta-r)e^{-(\beta+r)t}}[V-\frac{P}{r}(1-e^{-rt})], \tag{31}$$

$$\mu=-\frac{\rho\sigma H_{VD}+\lambda H_V}{VH_V}=\frac{-\rho\sigma\hat{H}_{DZ}+\lambda Z\hat{H}_{ZZ}}{V}=-\frac{\lambda Z}{V}g_Z=\frac{\lambda}{V}\cdot[V-\frac{P}{r}(1-e^{-rt})] \tag{32}$$

4　结语

从以上式(31)和(32)不难发现，两式都有一个共同的 $[V-\frac{P}{r}(1-e^{-rt})]$ 项，这说明养老基金的缴费水平和投资比例这两项最优控制决策既受总资产的影响又受待遇水平的影响，该项表示总资产扣除待遇发放现值的净资产部分。对于缴费水平 C 而言，它与净资产成一种比例关系，比例系数为 $\frac{(\beta+r)}{1-(1-\beta-r)e^{-(\beta+r)t}}$，可以看出，随着时间推移，缴费与净资产的比例逐渐缩小，体现了待遇预定制养老金以少缴费而领取固定养老待遇的福利宗旨。对于风险投资比例 μ 而言，它正比于净资产与总资产的对比，其比例关系为 λ，该项表示的是风险溢价部分，这说明除开资产因素外风险投资比例完全取决于因承担风险而获得的额外收益水平，风险收益越大，风险投资力度就越大。

考虑缴费水平 P 的影响，对待遇预定制养老基金，随着社会进步，以及考虑通货膨胀和人们生活水平的提高，养老金待遇随之提高。在其它条件不变的情况下，该决策式表明，养老金的缴费水平要随着待遇水平的提高而降低，这也恰好满足了养老基金追求的最优问题：通过投资收益，尽量降低缴费水平。同时，投资风险资产的比例也要随着待遇水平的提高而降低，进一步论证了养老基金投资应该遵循的基本原则：满足收益性的前提是安全性和流动性。

参考文献：

[1] 王晓军. 中国养老金制度及其精算评价[M]. 北京：经济科学出版社，2002.

[2] Josa-Fombellida R, Rincón-Zapatero J P. Optimal asset allocation for aggregated defined benefit pension funds with stochastic interest rates [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 201(1): 211－221.

[3] Boulier J F, Trussant E, Florens D. A dynamic model for pension funds management[C]. Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium, Brussels, September, 1995.

[4] Haberman S, Butt Z, Megaloudi C. Contribution and solvency risk in a defined pension scheme[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 27(2): 237－259.

[5] Haberman S, Vigna E. Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 31(1): 35－69.

[6] 肖建武，秦成林，胡世培. 待遇预定制养老基金管理的常方差弹性模型[J]，上海大学学报((自然科学版)，2004, 10(6): 649－653.

[7] 肖建武，秦成林. 养老基金管理的常方差弹性模型及 Legendre 变换-对偶解法[J]. 系统工程理论与实践，2005, 25(9): 49－53.

[8] Cox J. The constant elasticity of variance option pricing model [J]. The Journal of Portfolio Management, 1996, 23: 16－17.

[9] Heston S L. A closed-form solution for options with

stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. The Review of Financial Studies. 1993,6(2):327－343.

[10] 李静,周峤. Heston 随机波动率模型下一类多资产期权的定价[J]. 系统工程学报 2012,27(3):320－326.

[11] Han Jiguang, Gao Ming, Zhangc Qiang, et al. Option prices under stochastic volatility[J]. Applied Mathematics Letters, 2013,26(1): 1－4.

[12] Kim J, Kim B, Moon K S, et al. Valuation of power options under Heston's stochastic volatility model[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2012, 36 (11): 1796－1813.

[13] Li Zhongfei, Zeng Yan, Lai Yongzeng. Optimal time-consistent investment and reinsurance strategies for insurers under Heston's SV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 51(1): 191－203.

[14] 李艳方,林祥. Heston 随机方差模型下的最优投资和再保险策略[J]. 经济数学,2009,26(4):32－41.

[15] 林祥,杨益. Heston 随机方差模型下确定缴费型养老金的最优投资[J]. 应用数学,2010,23(2):413－418.

[16] Choulli T, Hurd T R. The role of hellinger processes in mathematical finance[J]. Entropy 2001, 3(3): 150－161.

[17] Jonsson M, Sircar R. Optimal investment problems and volatility homogenization approximations[M]//Bourlioux A, Gander M, Sabidussi G. Modern methods in scientific computing and applications. Netherlands: Springer, 2002:255－281.

[18] Xiao Jianwu, Qin Chenglin. Constant elasticity of variance model and analytical strategies for annuity contracts[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(11):1499－1506.

[19] Xiao Jianwu, Zhai Hong, Qin Chenglin. The constant elasticity of variance(CEV) model and Legendre transform-dual solution for annuity contracts[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 40(2):302－310.

[20] Cox J C, Huang C F. A variational problem arising in financial economics[J]. Math. Econ, 1991, 20(5):465－487.

[21] Kramkov D, Schachermayer W. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets[J]. Annals of Applied Probability 1999, 9 (3):904－950.

The Optimal Portfolio Decision and Contribution Plan of Defined Benefit Pension Funds Based on a Heston Stochastic Volatility Model and Legendre Dual Transform Method

XIAO Jian-wu[1], YIN Xi-ming[2]

(1. Business School, Central South University of Forestry & Technology, Hunan Changsha 410004, China;
2. Department of Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The defined benefit pension system applies widely in China. The portfolio and the contribution plan are the two core issues in this system. Thus, a Heston stochastic volatility control model with the logarithm utility function for the portfolio of the defined benefit pension funds is created in this paper, and a stochastic differential Bellman equation by applying optimal control theory is obtained. But this equation is very difficult to solve, so it transfers the primal problem to the dual problem and provides an analytic solution to the primal optimal problem by applying the Legendre transform and the dual theory. In theory, the paper enriches the methods of the model specification and the model solution for the stochastic volatility control model about the portfolio. In practical level, an optimal asset allocation strategy (between a risky asset and a reckless asset) and the least contribution policy, and expressions of quantity relations between the optimal decisions and the total assets, the pension benefit, the net assets and the risk premium to achieve the utility goal are found in this paper.

Key words: defined benefit pension funds; portfolio; stochastic volatility; Heston model; Legendre transform