第 21 卷　第 6 期　　中国管理科学　　Vol. 21, No. 6
2013 年　12 月　　Chinese Journal of Management Science　　Dec., 2013

文章编号:1003－207(2013)06－0080－08

两级商业信用下存在顾客预付的易腐品库存模型

贾　涛,郑　毅,常建龙

(西安交通大学管理学院,陕西 西安　710049)

摘　要:在销售单一品种的易腐品供应链中,假设销售商在获得供应链上游供应商延时还款的同时,也从(供应链)下游顾客处获得了部分预付款。分三种情况分别讨论销售商的成本构成,并由此建立数学模型以求解最优订货周期使得销售商单位时间总成本最小化。通过数学证明得到了目标函数的解析性质,结果显示每种情况下在可行域范围内至多存在一个极小值点。以此为基础给出了相应的命题以有效地确定销售商的最优决策。最后结合运作管理实践,通过数值算例说明了模型的有效性。

关键词:经济订货批量;易腐品;两级商业信用;部分预付款;库存管理

中图分类号:C931　　**文献标识码**:A

1　引言

商业信用是实物商品供应链内企业在商品交易中由于延期付款或预收账款所形成的企业信贷关系。从供应链管理的角度看,商业信用可以解决供应链上的资金薄弱环节,而供应商通过提供信用期可能吸引更多的下游企业销售其产品,整合供应链的资金流和物流,并由此增加供应链的协调性。有关商业信用下的企业库存管理的理论研究,主要集中于分析下游零售企业在已知供应商的延时付款期限后,最优的经济订货批量决策问题,即考虑延期付款条件下的单级商业信用 EOQ 模型。由于实物商品的分销渠道内,可能存在中间环节。因此两级商业信用条件下(供应商给销售商提供商业信用的同时,销售商也给其下游的各个顾客/各零售商,提供商业信用)的企业库存决策问题,逐渐受到了学者的关注。

Huang[1] 建立了一个两级商业信用条件下的 EPQ 模型,模型假设供应商提供的延迟还款期长度 M 大于零售商提供给顾客的延迟还款期长度 N,根据 M、N 和零售商订货周期 T 三者之间的相互关系分情况讨论了零售商的库存资金成本和销售收入的利息收益,给出了零售商的最优订货策略,并进行了相应的数值算例分析。Teng 和 Chang Chuntao[2] 进一步放宽了 Huang[1] 的 M 大于 N 的假设。Chung 和 Huang[3] 研究了两级商业信用条件下的两仓储易腐品库存模型,零售商拥有一个自有仓库的同时,可选择一个租赁仓库,给出了相关定理以确定零售商的最优订货批量。Teng 等[4] 放松了对于资金机会成本的限制条件,建立了两级商业信用条件下的 EPQ 模型,假设需求率是销售价格的减函数。Liao[5] 的两级商业信用非瞬时到货库存模型的假设与 Huang[1] 的 EPQ 模型类似,并且考虑了存在常数腐败率的产品。

两级商业信用问题的研究,可以将最终的市场需求速率,与零售商提供的延时付款期长度联系起来。Jaggi 等[6] 的模型中,零售商的市场需求率是其提供给顾客的延时还款期的增函数,以利润最大化为目标,分析了零售商最优补货批量决策。Thangam 和 Uthayakumar[7] 则进一步将 Jaggi[6] 的模型扩展到 EPQ 背景下,假设商品存在常数腐败率,市场需求率同时依赖于商品销售价格和延迟还款期,建立了利润最大化的目标函数,结合数学证明给出了求解步骤。Ho[8] 也分析了最终市场需求率同时依赖于销售价格和延时付款期的两级商业信用库存模型,但是其需求函数的形式与 Thangam[7] 完全不同,且没有考虑产品的易腐性。

商业信用作为一种重要的"激励-协调-分配"机制,其决策是一个涉及多公司层面(供应链参与方)的交互过程,而影响商业信用期限的最重要因素则

收稿日期:2011－07－28;**修订日期**:2013－06－04
基金项目:国家自然科学基金资助项目(71271168,70871097)
作者简介:贾涛(1969－),男(汉族),山东肥城市人,西安交通大学管理学院,副教授,博士,研究方向:供应链与物流管理、生产与运作管理等.

是资金成本[9]。不同的管理策略会对资金成本的核算产生影响,因而也就有了商业信用的诸多拓展方向,如预付款就是商业信用的一个重要方面。供应商通过收取下游企业的预付款,可以减少库存资金的压力并控制违约风险。在商业信用相关的确定性库存模型中,由于假设提前期为零或者提前期固定,因此按固定比例在到货之前预付货款的库存模型,与货到部分付款的模型(部分延期付款—partially permissible delay in payments)在数学性质上是等价的。贾涛等[10]假设产品在销售阶段存在常数腐败,研究了部分延期付款条件下的易腐品联合经济订货批量模型,零售商在收到订货后,需要立即支付 $1-\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ 部分货款,其余 α 部分则获得信用期为 M 的延期付款,以供应链系统的总成本最小化来决策最优订货周期 T 和订货量乘数 n,并证明了最优解的存在。Ouyang 等[11]假设市场需求率为常数,商品存在常数腐败率,若零售商的订货量超过 W,则获得由供应商提供的延迟还款期 M(条件延时付款),若订货量低于 W,则零售商需要在到货时支付 $1-\alpha$ 比例的货款,文章中证明了最优解需要满足的条件。Teng[12]则将部分延期付款条件扩展到两级商业信用的情境下:供应商提供销售商延时还款期 M,而在最终顾客方面,α 比例的货款需立即支付给销售商,其余的 $1-\alpha$ 的货款获得一个延迟还款期 N。国内学者也对延期付款进行了研究,主要在延期付款背景下,针对不同的决策情境来考虑最优库存策略,如基于订货量(供应商提供给零售商的延期支付与订货量相关)的延时付款模型[13],同时考虑现金折扣的延期付款模型[14],考虑延期支付的斯塔克伯格模型[15]、延期支付下的退化性商品的最优销售和订购策略[16],以及基于延期付款的供应链协调[17]等。

从两级商业信用相关的文献中可以看出,目前的理论研究,对于销售商提供给顾客的商业信用条款,主要集中于延期付款策略(或部分延期付款)。然而,在我国的运作管理实践中,由于人口众多、地理位置广阔等原因,销售商可能存在大量的中小顾客(零售商),这些规模较小的顾客在跟其供货商进行商品交易时,因为谈判能力较弱,故现款现货(不能获得延时付款)是经常采用的方式,而且供货企业针对某些资质较低的顾客,较为紧俏或者成本较高的商品,可能会要求提前预付部分货款,以控制违约风险并加快资金周转。即使在我国的零售行业,针对某些特定商品的批发业务(如企业、单位给职工福利发放的购物凭证、提货卡等),也是货款先于需求发生的一种形式。

本文以预付款为背景,对于 Teng[12]的两级商业信用模型在两个方面进行扩展:(1)所研究的产品为易腐产品;(2)本文的两级商业信用条款为,供应商对销售商提供延时还款,而销售商的最终顾客不能获得延时还款,且需要给销售商预付部分货款。由于此时预付款的提前时间对于企业库存决策产生了影响,因此分析其成本的形式并求解最优订货策略,就是本文研究的目的。

2　假设条件与符号表示

(1)供应链内有单一销售商向单一供应商订货,并以常数需求率 D 向其顾客(零售商)销售某种腐败率为常数 $\theta(0<\theta<1)$ 的产品;

(2)供应商提供给销售商的延时还款期为 M,而销售商不提供延时还款期给下游顾客,且顾客需求的 α 部分在提货时即刻付款,$1-\alpha$ 部分的顾客需求则根据提货时间提前 N 时间长度向销售商预付货款($0\leqslant\alpha\leqslant1$);

(3)销售商的进货价格为 c,销售价格为 p,库存保管成本为 h(不包括资金成本),资金收益率 I_e,资金成本率 I_k,以上参数都为已知和确定的常数;

(4)销售商的订货批量为 Q,相应的订货周期为 T,其中订货周期 T 是决策变量;

(5)销售商每次订货成本为 A;即时补货,不允许缺货且计划期长度无限。

3　模型构建

3.1　销售商成本的构成分析

根据假设条件,销售商是在已知批发价格、预付条款、延时还款期、需求率、腐败率和自身资金成本的条件下,确定最优订货周期 T(从而确定订货量 Q),并使得单位时间总成本最小化。用 $I(t)$ 表示 t 时刻销售商的库存量,则有[11]:

$$I(t)=D[e^{\theta(T-t)}-1]/\theta,\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{1}$$

而销售商的订货量 Q 可以表示为:

$$Q=I(0)=D(e^{\theta T}-1)/\theta \tag{2}$$

销售商在单位时间内的总成本=固定订货成本+库存保管成本+腐败成本+过了还款期后库存资金成本-信用期内的利息收益。

固定订货成本:A/T

库存保管成本(不包括库存资金成本):$\frac{h}{T}$

$\int_0^T I(t)\mathrm{d}t = \frac{hD}{\theta^2 T}(e^{\theta T} - \theta T - 1)$

腐败成本：$\frac{c}{T}(Q - DT) = \frac{cD}{T}(\frac{e^{\theta T} - 1}{\theta} - T)$

销售商在延期给供应商付款的同时为顾客提供部分预付款条件，由此涉及到对销售收入的利息、库存资金成本的分类讨论核算，借鉴 Teng[12] 的核算方式，将销售收入分为即时付款（需求发生时付款）与预付款两部分，分别计算其库存资金成本和销售收入的利息收益。

过了还款期后库存资金成本和销售收入的利息收益根据 M、N 以及销售商订货周期 T 之间的相互关系，分以下 3 种情况：(1)$M \leqslant T-N$；(2)$T-N < M < T$；(3)$T \leqslant M$

第一区间：$M \leqslant T - N$，即 $M + N \leqslant T$

(1)预付款的 $1-\alpha$ 部分

该 $1-\alpha$ 部分的货物，销售商在需求发生时刻（顾客提货时）提前 N 时间段收取顾客货款，在 T-N 时刻点回收完所有销售货款，并且在 M 时刻点向供应商支付进货的货款。由此，销售商获得 N 到 M 时段内的销售收入的利息收益，支付 M 到 T-N 时段的库存资金成本。

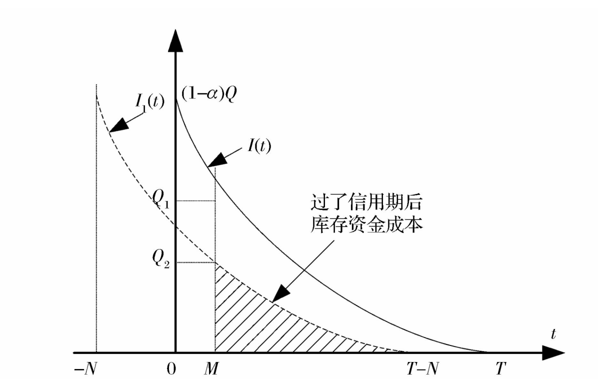

图 1 $M+N \leqslant T$ 时，$1-\alpha$ 部分的需求对应的销售商库存曲线

过了还款期 M 后库存资金成本：由于在两级商业信用的研究中，资金机会成本的核算方式不尽相同，且以易腐品和预付款为对象的文献较少，因此本文给出一种核算策略—用图 1 中阴影部分的面积表示这项成本，即(核算策略的意义解释如下文)：

$$(1-\alpha)\frac{cI_k}{T}\int_M^{T-N}\frac{D}{\theta}[e^{\theta(T-N-t)} - 1]\mathrm{d}t = (1-\alpha)\frac{cDI_k}{\theta^2 T}[e^{-\theta(M-T+N)} + M\theta - 1 - \theta T + \theta N]$$

图 1 中，$I(t)$ 表示销售商的$(1-\alpha)$部分需求对应的库存变化曲线，曲线 $I_1(t)$ 表示的是将 $I(t)$ 向左平移 N 时间段后得到的与收入相对应的曲线（顾客付款的时刻，早于需求实际发生时刻的长度为 N）。因此对于销售商来说，从实际到货时刻 0 点开始，到达还款期截止的 M 时刻，顾客已经付款给销售商的商品数量为$(1-\alpha)D(M+N)$；由于在 $T-N$ 时刻，销售商已经收回所有 $(1-\alpha)$ 部分的货款，因此核算 $(1-\alpha)$ 部分库存资金成本的截止时刻就是 $T-N$。

①如果是非易腐产品($\theta=0$)，销售商需要在 M 时刻垫付货款的商品数量是图 1 中的 $Q_1 = (1-\alpha)[Q - D(M+N)]$（给供应商还款）；按照两仓储模型的处理原则，存货中成本高的部分首先核销其库存资金的成本[18]，因此这部分的库存资金成本为 $Q_1(T-N-M)/(2T)$。

②与此对应，针对易腐性的产品($\theta>0$)，在核算库存资金的成本时，需要扣除腐败掉的部分（其成本计入腐败成本）。图 1 中，Q_2 就是表示从 Q_1 中扣除掉腐败的商品后，用以核算库存资金成本的商品数量，因此 $Q_f = Q_1 - Q_2$ 表示的是扣除掉的腐败商品数量，即从销售商开始收到顾客货款（有收入）的 $-N$ 时刻，到达 M 时刻，应当扣除的腐败产品数量是 Q_f，由此库存资金成本核算的截止时间恰好是 $T-N$。

信用期内收入的利息收益：如图 2 所示阴影部分的面积，其值为 $(1-\alpha)\frac{pI_e D(M+N)^2}{2T}$

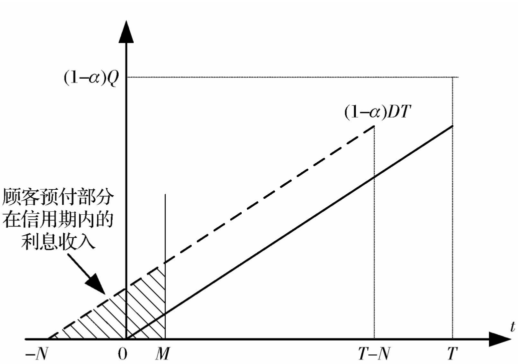

图 2 $M+N \leqslant T$ 时，$1-\alpha$ 部分的需求对应的销售商收入曲线

(2)即时付款 α 部分—即销售商获得供应商的还款期 M 后，在销售过程中可以立即收到顾客的货款，因此按照单级延期付款的相关文献，如 Ouyang 等[11]可以得到

过了信用期后库存资金成本：$\alpha\frac{cI_k}{T}\int_M^T I(t)\mathrm{d}t =$

$\dfrac{\alpha c I_k D}{\theta^2 T}[e^{-\theta(M-T)}+M\theta-1-\theta T]$

信用期内销售收入的利息收益：$\dfrac{pI_e DM^2\alpha}{2T}$

第二区间：$T-N<M<T$，即 $M<T<M+N$

(1)预付款的 $1-\alpha$ 部分

过了信用期后库存资金成本：由于信用期大于销售商回收完所有货款的时刻 $T-N$，因此这项成本为 0

信用期内销售收入的利息收益：相当于在图 2 中，M 位于 $T-N$ 时刻的右侧，因此根据库存模型中利息的计算方法，其总面积为一个三角形和一个矩形面积的和，即：

$$(1-\alpha)\frac{pI_e}{T}\left[\frac{DT^2}{2}+DT(M+N-T)\right]=(1-\alpha)pI_eD\left(M+N-\frac{T}{2}\right)$$

(2)即时付款的 α 部分

过了信用期后库存资金成本：$\alpha\dfrac{cI_k}{T}\displaystyle\int_M^T I(t)\mathrm{d}t=\dfrac{\alpha c I_k D}{\theta^2 T}[e^{-\theta(M-T)}+M\theta-1-\theta T]$

信用期内销售收入的利息收益：$\dfrac{\alpha pI_e DM^2}{2T}$

第三区间：$T\leqslant M$

与前两种情况类似，分析如下

(1)预付款的 $1-\alpha$ 部分

过了信用期后库存资金成本：由于信用期大于订货周期，因此这项成本为 0

M 时刻前的利息收益：$\dfrac{(1-\alpha)pI_e}{T}\left[\dfrac{DT^2}{2}+DT(M+N-T)\right]=(1-\alpha)pI_eD\left(M+N-\dfrac{T}{2}\right)$

(2)即时付款的 α 部分

过了信用期后库存资金成本：0

信用期内销售收入的利息收益：$\dfrac{\alpha pI_e}{T}\left[\dfrac{DT^2}{2}+DT(M-T)\right]=\alpha pI_eD\left(M-\dfrac{T}{2}\right)$

3.2　销售商目标函数建立

根据前面的分析，得到销售商分段目标函数

第一区间：$M+N\leqslant T$

$$TRC_1(T)=\frac{A}{T}+\frac{hD}{\theta^2T}(e^{\theta T}-\theta T-1)+\frac{cD}{T}\left(\frac{e^{\theta T}-1}{\theta}-T\right)-\alpha\frac{pI_eDM^2}{2T}+(1-\alpha)\frac{cI_kD}{\theta^2T}[e^{\theta(T-M-N)}+\theta M+\theta N-\theta T-1]+\alpha\frac{cI_kD}{\theta^2T}[e^{\theta(T-M)}+\theta M-\theta T-1]-(1-\alpha)\frac{pI_eD(M+N)^2}{2T}\tag{3}$$

第二区间：$M<T<M+N$

$$TRC_2(T)=\frac{A}{T}+\frac{hD}{\theta^2T}(e^{\theta T}-\theta T-1)+\frac{cD}{T}\left(\frac{e^{\theta T}-1}{\theta}-T\right)-\alpha\frac{pI_eDM^2}{2T}+\alpha\frac{cI_kD}{\theta^2T}[e^{\theta(T-M)}+\theta M-\theta T-1]-(1-\alpha)pI_eD\left(M+N-\frac{T}{2}\right)\tag{4}$$

第三区间：$T\leqslant M$

$$TRC_3(T)=\frac{A}{T}+\frac{hD}{\theta^2T}(e^{\theta T}-\theta T-1)+\frac{cD}{T}\left(\frac{e^{\theta T}-1}{\theta}-T\right)-(1-\alpha)pI_eD\left(M+N-\frac{T}{2}\right)-\alpha pI_eD\left(M-\frac{T}{2}\right)\tag{5}$$

容易验证函数值在端点处是连续的，即 $TRC_1(M+N)=TRC_2(M+N)$，$TRC_2(M)=TRC_3(M)$，且一阶导函数也是连续的。

4　模型优化分析

第一区间：$M+N\leqslant T$

将目标函数重新表示为：$TRC_1(T)=c_{11}e^{\theta T}/T+c_{12}/T+c_{13}$，其中：

$$c_{11}=hD/\theta^2+\frac{cD}{\theta}+(1-\alpha)cI_kDe^{-\theta(M+N)}/\theta^2+\alpha cI_kDe^{-\theta M}/\theta^2>0$$

$$c_{12}=A-\frac{hD}{\theta^2}-\frac{cD}{\theta}+(1-\alpha)\left[\frac{cDI_k(M\theta-1+N\theta)}{\theta^2}-\frac{pI_eD(M+N)^2}{2}\right]+\frac{\alpha cDI_k(M\theta-1)}{\theta^2}-\frac{\alpha pI_eDM^2}{2}$$

$$c_{13}=-hD/\theta-cD-(1-\alpha)cDI_k/\theta-\alpha cDI_k/\theta<0$$

式(3)的一阶条件可以表示为：$TRC_1{}'(T)=f_1(T)/T^2=0$，其中 $f_1(T)=c_{11}\theta e^{\theta T}T-c_{11}e^{\theta T}-c_{12}$，引入朗伯函数 LambertW($x$)，根据函数定义满足 $\mathrm{LambertW}(x)e^{\mathrm{LambertW}(x)}=x$。由此，求解得到惟一驻点 $T_1=[\mathrm{LambertW}(c_{12}/c_{11}e)+1]/\theta$。分析 $f_1(T)$ 的性质，因为 $f_1{}'(T)=c_{11}\theta^2e^{\theta T}T>0$，所以 $f_1(T)$ 为单调递增函数，又 $\lim\limits_{T\to+\infty}f_1(T)=+\infty$，所以可得命题 1。

命题 1　(1)若 $f_1(M+N)=c_{11}\theta e^{\theta(M+N)}(M+N)-c_{11}e^{\theta(M+N)}-c_{12}\leqslant 0$，则在定义域内存在惟一极值点 $T_1=[\mathrm{LambertW}(c_{12}/c_{11}e)+1]/\theta$ 使得目标函数 $TRC_1(T)$ 取得极小值 $TRC_1(T_1)$；(2)若 $f_1(M$

$+N) = c_{11}\theta e^{\theta(M+N)}(M+N) - c_{11}e^{\theta(M+N)} - c_{12} > 0$，则销售商目标函数 $TRC_1(T)$ 在左端点 $T = M+N$ 取得极小值。

证明：(1)根据 $f_1(T)$ 的性质和中值定理可知 T_1 一定存在且惟一，且 T_1 处的二阶导数为：

$TRC_1''(T_1) = f_1'(T_1)/T_1^2 - 2f_1(T_1)/T_1^3 = f_1'(T_1)/T_1^2 > 0$

所以 T_1 是使得目标函数式(3)取得极小值的惟一解。

(2)此时在可行域内均满足 $TRC_1'(T) = f_1(T)/T^2 > 0$，即目标函数单调递增，因此在其左端点处取得极小值。证毕。

第二区间：$M < T < M+N$

同样将目标函数重新表示为：$TRC_2(T) = c_{21}e^{\theta T}/T + c_{22}/T + c_{23} + c_{24}T$，其中：

$c_{21} = hD/\theta^2 + cD/\theta + \alpha cI_kDe^{-\theta M}/\theta^2 > 0$

$c_{22} = A - hD/\theta^2 - cD/\theta + \alpha cI_kD(\theta M - 1)/\theta^2 - \alpha pI_eDM^2/2$

$c_{23} = -hD/\theta - cD - \alpha cI_kD/\theta - (1-\alpha)pI_eD(M+N) < 0$

$c_{24} = (1-\alpha)pI_eD/2 \geqslant 0$

令 $TRC_2'(T) = f_2(T)/T^2$

$TRC_2''(T) = f_{22}(T)/T^3$，其中：

$f_2(T) = c_{21}\theta e^{\theta T}T - c_{21}e^{\theta T} - c_{22} + c_{24}T^2$，

$f_{22}(T) = c_{21}\theta^2e^{\theta T}T^2 - 2c_{21}\theta e^{\theta T}T + 2c_{21}e^{\theta T} + 2c_{22}$

则有 $f_{22}'(T) = c_{21}\theta^3T^2e^{\theta T} > 0$，所以目标函数式(4)的二阶导函数的分子部分是单调递增的。

进一步，不考虑 T 的可行域约束时，由于 $f_{22}(0) = 2c_{21} + 2c_{22}$，$f_2(0) = -c_{21} - c_{22}$，则有：

当 $c_{21} + c_{22} > 0$ 时，必有 $f_{22}(T) > 0, T \in (0, +\infty)$，即式(4)是凸函数且 $f_2(T)$ 单调递增，此时由于 $f_2(0) < 0$，所以在 $T \in (0, +\infty)$ 存在唯一极小值驻点 T_2；

当 $c_{21} + c_{22} < 0$ 时，由于 $\lim\limits_{T\to+\infty} f_{22}(T) = +\infty$，因此在 $(0, +\infty)$ 范围内存在唯一拐点 T_M，满足 $f_{22}(T_M) = 0$，即式(4)是先凹后凸的函数，最多存在两个驻点(一阶导函数首先递减—极大值点，而后递增—极小值点)。此时由于 $f_2(0) > 0$，将 T_M 代入 $f_2(T)$ 的表达式，则有

$f_2(T_M) = c_{21}\theta^2e^{\theta T}T_M^2/2 + c_{24}T_M^2 > 0, T_M \in (0, +\infty)$

也就是一阶导函数在拐点处的函数值大于零，说明 $f_2(T) > 0, T \in (0, +\infty)$，即没有驻点存在；

当 $c_{21} + c_{22} = 0$ 时，$f_{22}(0) = f_2(0) = 0$，且 $f_{22}(T) > 0, T \in (0, +\infty)$，说明 $f_2(T) > 0, T \in (0, +\infty)$，即此时在 $T \in (0, +\infty)$ 范围内没有驻点。综上可得命题如下

命题 2 (1)若 $f_2(M) < 0 < f_2(M+N)$，则目标函数 $TRC_2(T)$ 在可行域内存在惟一极小值点 T_2 满足 $f_2(T_2) = 0$；(2)若 $f_2(M) \geqslant 0$，或者 $f_2(M+N) \leqslant 0$，则目标函数 $TRC_2(T)$ 在 $M < T < M+N$ 范围内无极小值点。

根据上面的分析，参考命题 1 相同的证明思路，考虑到本区间是开区间，即可得到命题的结论，因此证明过程略。

第三区间：$T \leqslant M$

将目标函数式(5)重新表示为：$TRC_3(T) = c_{31}e^{\theta T}/T + c_{32}/T + c_{33} + c_{34}T$，其中：

$c_{31} = hD/\theta^2 + cD/\theta > 0$

$c_{32} = A - hD/\theta^2 - cD/\theta$

$c_{33} = -hD/\theta - cD - \alpha pI_eDM - (1-\alpha)pI_eD(M+N) < 0$

$c_{34} = pI_eD/2 > 0$

令 $TRC_3'(T) = f_3(T)/T^2$，$TRC_3''(T) = f_{33}(T)/T^3$，其中：

$f_3(T) = c_{31}\theta e^{\theta T}T - c_{31}e^{\theta T} - c_{32} + c_{34}T^2$

$f_{33}(T) = c_{31}\theta^2e^{\theta T}T^2 - 2c_{31}\theta e^{\theta T}T + 2c_{31}e^{\theta T} + 2c_{32}$

则有 $f_{33}'(T) = c_{31}\theta^3e^{\theta T}T^2 > 0$，所以目标函数式(5)的二阶导函数的分子部分是单调递增的。进一步，由于 $f_{33}(0) = 2c_{31} + 2c_{32} = 2A > 0$，所以有 $f_{33}(T) > 0, T \in (0, +\infty)$，由此说明 $f_3(T)$ 是增函数。又根据 $f_3(0) = -c_{31} - c_{32} = -A < 0$，可以得到下面的命题

命题 3 (1)若 $f_3(M) \geqslant 0$，则目标函数 $TRC_3(T)$ 在定义域 $(0, M]$ 内存在惟一极小值点 T_3，满足 $f_3(T_3) = 0$；(2)若 $f_3(M) < 0$，则目标函数 $TRC_3(T)$ 在右边界 $T = M$ 处取得极小值。

由于证明过程与命题 1 类似，所以省略。

5 数值算例及灵敏度分析

由于一阶导函数也是连续的，令 $\Delta_1 = f_2(M) = f_3(M)$，$\Delta_2 = f_1(M+N) = f_2(M+N)$，因此可以得到下面的命题以确定销售商的最优订货周期。

命题 4 使得销售商单位时间内总成本最小的最优订货周期 T^* 为：(1)若 $\Delta_1 \geqslant 0$，则 $T^* = T_3$；(2)若 $\Delta_1 < 0 < \Delta_2$，则有 $T^* = T_2$；(3)若 $\Delta_2 \leqslant 0$，则 $T^* = T_1$。

表 1　M, N, θ, α 变化时最优订货周期和总成本的变化情况

M	Δ_1	Δ_2	最优解情形	T^*	Q^*	$TRC(T^*)$
1	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.1400	1518.85	(↑)81.1480
3	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.1053	1514.86	(↑)80.6378
10	<0	>0	$T^*=T_2$	(↓)14.0014	1502.90	(↓)78.4767
14	$\geqslant 0$	>0	$T^*=T_3$	(↓)13.9911	1501.72	(↓)77.1544
28	$\geqslant 0$	>0	$T^*=T_3$	(↓)13.9911	1501.72	(↓)72.4877
N						
1	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.1356	1518.34	(↑)81.0284
3	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.1014	1514.41	(↑)80.5530
5	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.0586	1509.48	(↑)80.0286
9	<0	>0	$T^*=T_2$	(↓)14.0066	1503.50	(↓)78.8543
14	<0	>0	$T^*=T_2$	(↓)14.0066	1503.50	(↓)77.3543
θ						
0.02	<0	>0	$T^*=T_2$	(↓)9.9687	1103.20	(↑)112.2173
0.03	<0	>0	$T^*=T_2$	(↓)8.0934	916.05	(↑)138.1960
0.04	$\geqslant 0$	>0	$T^*=T_3$	(↓)6.9566	802.09	(↑)160.5312
0.05	$\geqslant 0$	>0	$T^*=T_3$	(↓)6.1751	723.46	(↑)180.4994
0.06	$\geqslant 0$	>0	$T^*=T_3$	(↓)5.5966	664.97	(↑)198.7700
α						
0.2	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.0228	1505.36	(↑)79.6540
0.3	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.0387	1507.19	(↑)79.8537
0.4	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.0546	1509.02	(↑)80.0533
0.5	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.0704	1510.84	(↑)80.2527
0.6	<0	$\leqslant 0$	$T^*=T_1$	(↑)14.0863	1512.67	(↑)80.4520

为了说明模型的计算过程,考虑销售商的初始参数如下:$D=100$ 件/天,订货成本 $A=600$ 元/次,产品的腐败率为 $\theta=0.01$,库存保管成本为 1 元/件/年,销售价格 $p=15$ 元/件,进货价格 $c=5$ 元/件,资金机会成本分别为 $I_k=0.1$ 元/元/年,$I_e=0.08$ 元/元/年,信用期 $M=7$ 天,预付款提前时间 $N=7$ 天,预付比率为 $\alpha=0.1$。按照命题 4 的计算思路,采用 Maple 工具软件,编程求解得到销售商的最优订货周期为 $T^*=14.0068$ 天,相应的订货量为 $Q^*=1503.52$ 件,由此得到每天平均最小总成本 $TRC(T^*)=79.4543$ 元(以此结果作为基准进行灵敏度分析)。为探讨供应商给销售商提供的延迟还款期 M 及销售商向顾客收取的预付款提前期 N 等相关参数,对销售商订货决策及总成本的影响,下面分析参数 M, N, θ, α 变化时,销售商最优的订货周期和总成本,以及与基准数据比较得到的变化情况,结果见表 1。

表 1 中,各符号表示与正文中相同,而符号(↓)表示与基准数据比较,该数值减少;(↑)表示与基准数据比较,该数值增加。表 1 的表示方法参考 Teng 等[4]的处理方式,通过判断 Δ_1 和 Δ_2 的正负即可确定最优解所在的区间(如前所述目标函数是分段函数,自变量 T 的取值区间分别是:第一区间 $T\geqslant M+N$,第二区间 $M<T<M+N$,第三区间 $T\leqslant M$)。

从表 1 的计算结果可以看出,随着 M 和 N 的增加,最优解有从 T_1 向 T_3 转变的趋势,即最优解由自变量取值大的区间向取值小的区间转变。当供应商提供的延迟还款期 M 增加时,销售商的订货周期、订货批量和总成本均呈下降趋势。而延迟还款期 M 增加到某个数值后,销售商的订货批量则不再改变,但是销售商可以得到更多的利息收益,从而降低其总成本(本算例中是 $M=14$ 天,即两周)。M 增加而销售商订货量下降的原因,是销售商在获得更多的利息收益后,可以抵消由于订货周期减少而带来的订货成本的增加,并且因为订货批量的下降,可以进一步减少腐败损失。同理,随着顾客给销售商的预付款提前期 N 的增加,销售商的订货周期、订货批量和总成本下降。而当预付款提前期 N 增加到某一值后,不会再改变销售商的订货周期决策,但能提高销售商的利息收益,减少库存资金的成本,从而降低总成本。

腐败率 θ 变化时,销售商最优订货周期变化幅度较大。随着腐败率 θ 的增加,最优解由 T_2 变为 T_3(区间变化),销售商最优决策是降低订货量,以减少商品腐败数量,从而降低商品的腐败成本,总成本则随腐败率 θ 的增加而上升。当 α 变化时,最优解所在的区间不变,反映了顾客预付款比例对销售商的订货决策产生的影响较小。随着 α 的增加,顾客给

销售商的预付款比例 $1-\alpha$ 减少，顾客担负的库存资金成本会降低，销售商的订货周期、订货批量和总成本增加，此时销售商的主要矛盾是降低订货成本，由此增加了订货周期和腐败损失。

在本算例中，产品的腐败问题是主要的考虑因素，而降低腐败数量的直接策略是降低订货周期和批量(从而增加了订货成本)。因此通过延期支付货款和预售产品(预付款)，可以使销售商获得更多的资源，以达到自身的管理目标。由于联合使用了 M、N 和预付款策略，扩大了销售商的决策空间，进一步对于各项成本和收益的权衡，又提出了更加精细化决策的需求。

6 结语

易腐品的库存管理问题一直受到学者和供应链管理者的重视，除了技术手段的采用外，精细化的库存调度策略也能达到减少腐败损失，提高运作绩效的目标。本文针对实物商品供应链中的商业信用条款，综合了延期支付和预付款条件，在延时还款的易腐品库存决策模型的基础上，考虑了最终顾客可能存在的预付款条件，构建了两级商业信用下考虑顾客部分预付的易腐品库存决策模型。以销售商总成本最小化为目标，分情况证明了每段目标函数的解析性质，说明了在每个分段内至多存在一个极小值点，由此给出了相关命题以确定了模型的最优决策。在理论分析的基础上，进行了算例及灵敏度分析，计算表明在本文的参数情况下，M、N 和预付条件的使用，增加了销售商的决策灵活性以减少腐败成本。

本文的两阶段商业信用模型，适用于在渠道内谈判能力较强的中间商，也可以在零售业内找到对应的情境(如前文所述的顾客信用等级、特定商品的购物凭证等)；而所针对的易腐性商品在实物商品供应链内也有着广泛的应用。未来的研究可以针对供应链运作的实际，进一步考虑供应商的生产决策问题，即两级商业信用一体化易腐品库存决策模型。

参考文献：

[1] Huang Y F. Optimal retailer's replenishment decisions in the EPQ model under two levels of trade credit policy [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 176(3): 1577－1591.

[2] Teng J T, Chang Chuntao. Optimal manufacturer's replenishment policies in the EPQ model under two levels of trade credit policy[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 195(2): 358－363.

[3] Chung K J, Huang T S. The optimal retailer's ordering policies for deteriorating items with limited storage capacity under trade credit financing[J]. International Journal of Production Economics, 2007, 106(1): 127－145.

[4] Teng J T, Ouyang L Y, Chen L H. Optimal manufacturer's pricing and lot-sizing policies under trade credit financing[J]. International Transactions in Operational Research, 2006, 13: 515－528.

[5] Liao J J. An EOQ model with noninstantaneous receipt and exponentially deteriorating items under two-level trade credit[J]. International Journal of Production Economics, 2008, 113(2): 852－861.

[6] Jaggi C K, Goyal S K, Goel S K. Retailer's optimal replenishment decisions with credit-linked demand under permissible delay in payments[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 190(1): 130－135.

[7] Thangam A, Uthayakumar R. Two-echelon trade credit financing for perishable items in a supply chain when demand depends on both selling price and credit period[J]. Computer & Industrial Engineering, 2009, 57: 773－786.

[8] Ho C H. The optimal integrated inventory policy with price-and-credit-linked demand under two-level trade credit[J]. Computer & Industrial Engineering, 2011, 60(1): 117－126.

[9] 石晓军，张顺明，朱芳菲. 多因素视角下商业信用期限决策的双层规划模型与实证研究[J]. 中国管理科学，2008，16(6): 112－122.

[10] 贾涛，徐渝，耿凯平. 部分延期付款下易腐品联合经济订货批量模型[J]. 运筹与管理，2011，20(4): 1－9.

[11] Ouyang L Y, Teng J T, Goyal S K, et al. An economic order quantity model for deteriorating items with partially permissible delay in payments linked to order quantity[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 194(2): 418－431.

[12] Teng J T. Optimal ordering policies for a retailer who offers distinct trade credits to its good and bad credit customers[J]. International Journal of Production Economics, 2009, 119(2): 415－423.

[13] 邱昊，梁樑，余玉刚，等. 基于订货量的延期付款条件下三阶段经济订货模型[J]. 系统管理学报，2007，16(6): 669－672.

[14] 邱昊，梁樑，杨树. 供应商给定延期付款和现金折扣策略下的零售商最优库存策略[J]. 系统工程，2006，24(9): 18－23.

[15] 杨树，梁樑，邱昊. 考虑延期支付的斯坦伯格库存模

型[J]. 系统工程，2006，24(4)：21－24.

[16] 刘涛，李帮义，公彦德. 允许延期支付条件下退化性商品的销售与定购策略[J]. 中国管理科学，2009，17(5)：81－87.

[17] 刘冀琼，杨爱峰，冯帅. 基于延期支付的供应链协调模型研究[J]. 合肥工业大学学报：自然科学版，2010，33(011)：1702－1706.

[18] Yang Huiling. Two-warehouse inventory models for deteriorating items with shortages under inflation[J]. European Journal of Operational Research，2004，157(2)：344－356.

Inventory Model for Deteriorating Item Under Two-level Trade Credit Policy with Partially Advance Payments from Customers

JIA Tao，ZHENG Yi，CHANG Jian-long

(School of Management，Xi'an Jiaotong University，Xi'an 710049，China)

Abstract：Today's research is interested in the inventory decision models that have real business applications. In real life business，a necessary replenishment decision context between a supplier and a distributor could be characterized by an arrangement on the trade credit scenario such as permissible delay in payments. During the delay period，the distributor can accumulate revenue on sales and earn interest on that revenue，so the trade credit policy can be used to allocate the profit between the upstream and downstream members in the supply chain and bear the risk of inventory jointly with the purpose to increase the efficiency of supply chain. Over the years，the extensive research papers of trade credit has been addressed，and some of the published results have noticed that in practice the distributor could also adopt the trade credit policy to deal with his/her customer，that is two levels of trade credit which is a new viewpoint to develop the distributor's replenishment model. Also to reduce default risks，a distributor frequently requests his/her bad credit customers to pay a portion of the purchase amount before the order is received，i. e. ，partially advance payments，which is an important aspect of trade credit policy，has been neglected for a long time in the literatures investigating inventory problems under varying trade credit conditions. So we focus on the context of two-level trade credit considering both partially advance payments and permissible delay in payments to determine the optimal replenishment cycle in a single deteriorating item supply chain. Firstly，based on the related theoretical research of deteriorating items and trade credit，it is assumed that the supplier offers a fixed credit period to the distributor in this paper，while the customers of the channel have to make partially advance payments to the distributor in turn. Then，by analyzing the cost structure of the distributor under every scenario for the three distinct cases of the system parameters，the proper mathematical model is established to find the optimal ordering cycle inorder to minimize the total cost incurred per unit time. The properties of the objective function are derived，and it is shown that there exists at most one minimum point under every situation within its feasible region. Upon the above analysis，several propositions are developed to efficiently determine the optimal ordering policy for the distributor. Finally，combining operations management practice，numerical examples are conducted to illustrate the effectiveness of the proposed model. This paper extends the published deteriorating EOQ models and enables managers to make ordering cycle decisions more effectively from the distributor's perspective.

Key words：EOQ；deteriorating item；two-level trade credit；partially advance payments；Inventory management