第 12 卷 第 1 期
2004 年 2 月

中国管理科学
Chinese Journal of Management Science

Vol. 12, No. 1
Feb., 2004

文章编号: 1003- 207(2004)01- 0085- 04

不完全信息多维 Bertrand 模型及其分析

谭德庆[1], 刘光中[2]

(1. 西南交通大学经济管理学院, 四川成都 610031; 2. 四川大学工商管理学院, 四川成都 610064)

摘 要: 本文在文献[1]的基础上, 进一步讨论在不完全信息条件下两个企业关于具有一定替代性两种产品价格的静态多维 Bertrand 模型及其多维贝叶斯均衡, 并得到两个企业分别对每种产品单独博弈时的贝叶斯均衡策略劣于联合考虑这两种产品时进行多维博弈贝叶斯均衡策略的结果。

关键词: 多维; 替代性; 不完全信息; 贝叶斯均衡

中图分类号: O225 文献标识码: A

1 引言

在现实经济活动中, 企业一般都进行多种产品的生产或经营, 并且这些产品在市场上可能存在相互影响或联系(如产品之间存在替代性关系)。这样, 在市场上就可能存在着企业之间同时对这几种产品博弈的现象, 我们将这种参与人以多角度或在多领域内同时进行博弈, 并且所博弈的各个领域可能存在着相互影响或联系的博弈问题称为多维博弈问题[1]。在文献[1]中, 讨论了两个企业关于两种产品具有一定可替代关系时的完全信息静态多维 Bertrand 博弈模型。本文在此基础上, 讨论两个企业在其中一个企业两种产品的单位生产成本为不完全信息情况下, 关于两种产品价格的多维博弈问题, 同时在两种产品具有可替代性关系情况下, 进一步分析说明两个企业对两种产品联合考虑价格进行多维博弈的多维贝叶斯均衡策略优于对每种产品分别考虑策略并单独进行产品价格博弈的贝叶斯均衡[2]策略。

2 信息不对称多维"Bertrand"模型及其多维贝叶斯均衡

假设某地区有两个企业生产具有一定替代性两种产品, 并且两个企业所生产的同种产品在质量上有差异; 再假设两个企业所生产的这两种产品完全供给该地区, 并垄断该地区这两种产品的市场。在其中一个企业所生产的这两种产品的单位生产成本为不完全信息条件下, 两个企业如何选择这两种产品的价格进行博弈, 才能使自己的总利润达到最大, 这显然是一个不完全信息的二维博弈问题, 也可称为不完全信息二维 Bertrand 博弈问题。

设企业 i 选择这两种产品的市场价格为 $(p_{i1}, p_{i2}) \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $(p_{i1}, p_{i2}) \in P_{i1} \times P_{i2}$, $P_{i1} \times P_{i2}$ 表示企业 i 这两种产品的价格策略空间(即可选择的价格策略集合), 第一个下标表示企业, 第二个下标表示产品。由于在市场上这两种产品之间存在一定的替代性, 那么对于一个企业的某一种产品, 其顾客需求量不仅与本企业该产品市场价格有关, 而且也与对手同类产品的市场价格有关, 同时也与另一种产品的价格有关。因此, 企业 i 的第 k 种产品顾客需求函数应为 $Q_{ik} = Q_{ik}(p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})$。我们假设一个企业某一种产品的顾客需求函数与本企业该产品价格, 与对手该产品价格和另一种产品价格有如下线性关系

$$Q_{i1} = a - p_{i1} + \alpha p_{j1} + r_1\left(\frac{p_{i2} + p_{j2}}{2}\right)$$

$$Q_{i2} = b - p_{i2} + \beta p_{j2} + r_2\left(\frac{p_{i1} + p_{j1}}{2}\right)$$

其中, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$ 代表不同的企业; $\alpha(\alpha > 0)$ 表示企业 j 的第一种产品市场价格对企业 i 的第一种产品顾客需求量的影响系数; $\beta(\beta > 0)$ 表示企业 j 的第二种产品市场价格对企业 i 的第二种产品顾客需求量的影响系数; $r_1(r_1 > 0)$ 表示第二种产品的平均市场价格对企业 i 的第一种产品顾客需求量的影响系数; $r_2(r_2 > 0)$ 表示第一种产品的平均市场价格

收稿日期: 2003- 06- 25; 修改日期: 2003- 07- 28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70371045)
作者简介: 谭德庆(1966-), 男(汉族), 辽宁省义县人, 西南交通大学经济管理学院副教授, 研究方向: 博弈理论与应用、经济数学建模、决策分析等.

对企业 i 的第二种产品顾客需求量的影响系数(注. 上式中实质有两点假定: 1、在市场上两个企业所生产的同一种产品相互之间有相同的影响系数; 2、某一种产品的平均市场价格对两个企业的另一种产品的顾客需求量影响系数相同)。

在不影响问题讨论的情况下, 我们不考虑固定生产成本, 假设第一个企业所生产的两种产品单位成本分别为 C_{11}和 C_{12}, 第二个企业所生产的两种产品单位成本分别 C_{21}和 C_{22}。如果假设企业 1 两种产品的单位成本是共同知识[3](即两个企业都知道的), 而企业 2 两种产品的单位成本只有企业 2 自己知道, 企业 1 不知道, 但知道企业 2 两种产品的单位成本概率分布, 不妨设其概率密度函数为 $F(C_{21}, C_{22})$, 且 C_{21}和 C_{22}是相互独立的, 即有 $F(C_{21}, C_{22}) = F1(C_{21}) \cdot F2(C_{22})$。企业 i 的总利润函数为

$$
\begin{aligned}
U_i &= U_i(p_{i1}, p_{i2}, p_{j1}, p_{j2}) \\
&= Q_{i1}[p_{i1} - C_{i1}] + Q_{i2}[p_{i2} - C_{i2}] \\
&= \left[a - p_{i1} + \alpha p_{j1} + r_1\left(\frac{p_{i2} + p_{j2}}{2}\right)\right][p_{i1} - C_{i1}] \\
&\quad + \left[b - p_{i2} + \beta p_{j2} + r_2\left(\frac{p_{i1} + p_{j1}}{2}\right)\right][p_{j2} - C_{i2}]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

上式的利润函数是光滑可导的。我们首先对企业 2 的利润函数 U_2(即在(1) 式中 $i = 2$) 求关于 p_{21} 和 p_{22} 的导数, 并令 $\partial U_2/\partial p_{21} = 0$, $\partial U_2/\partial p_{22} = 0$, 得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_2}{\partial p_{21}} &= -p_{21} + C_{21} + a - p_{21} + \alpha p_{11} \\
&\quad + \frac{r_1}{2}p_{22} + \frac{r_1}{2}p_{12} + \frac{r_2}{2}p_{22} - \frac{r_2}{2}C_{22} = 0 \\
\frac{\partial U_2}{\partial p_{22}} &= \frac{r_1}{2}p_{21} - \frac{r_1}{2}C_{21} - p_{22} + C_{22} \\
&\quad + b - p_{22} + \beta p_{12} + \frac{r_2}{2}p_{21} + \frac{r_2}{2}p_{11} = 0
\end{aligned}
$$

通过合并整理, 可写成如下矩阵形式

$$
\begin{pmatrix} -2 & \frac{r_1 + r_2}{2} \\ \frac{r_1 + r_2}{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \frac{r_1}{2} \\ \frac{r_2}{2} & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_2}{2}C_{22} - C_{21} - a \\ \frac{r_1}{2}C_{21} - C_{22} - b \end{pmatrix}
$$

于是得到企业 2 的向量反应函数为

$$
\begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2}{4}\right)^2\right]}\begin{pmatrix} 1 & \frac{r_1 + r_2}{4} \\ \frac{r_1 + r_2}{4} & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \alpha & \frac{r_1}{2} \\ \frac{r_2}{2} & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + C_{21} - \frac{r_2 C_{22}}{2} \\ b + C_{22} - \frac{r_1 C_{21}}{2} \end{pmatrix}\right]
$$

对于企业 1, 由于不知道企业 2 两个产品的具体单位成本, 而只知道其联合概率分布, 企业 1 只能希望使它的期望利润最大化。企业 1 盈利函数的期望利润 EU_1 为

$$
\begin{aligned}
EU_1 &= \iint F(C_{21}, C_{22})\, U_1 dC_{21} dC_{22} \\
&= \iint F_1(C_{21}) F2(C_{22})\, U_1 dC_{21} dC_{22}
\end{aligned}
$$

利用最优化一阶条件 $\partial EU_1/\partial p_{11} = 0$, $\partial EU_1/\partial p_{12} = 0$, 得到

$$
\frac{\partial EU_1}{\partial p_{11}} = \iint F_1(C_{21}) F_2(C_{22})[a - 2p_{11} + \alpha p_{21} + \frac{r_1 + r_2}{2}p_{12} + \frac{r_1}{2}p_{22} + C_{11} - \frac{r_2}{2}C_{12}]\, dC_{21} dC_{22} = 0
$$

$$
\frac{\partial EU_1}{\partial p_{12}} = \iint F_1(C_{21}) F_2(C_{22})[b - 2p_{12} + \beta p_{22} + \frac{r_1 + r_2}{2}p_{11} + \frac{r_2}{2}p_{21} + C_{12} - \frac{r_1}{2}C_{11}]\, dC_{21} dC_{22} = 0
$$

计算整理后得到企业 1 的向量反应函数为

$$
\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2}{4}\right)^2\right]}\begin{pmatrix} 1 & \frac{r_1 + r_2}{4} \\ \frac{r_1 + r_2}{4} & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \alpha & \frac{r_1}{2} \\ \frac{r_2}{2} & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \iint F_1 F_2 p_{21} \mathrm{d}C_{21} \mathrm{d}C_{22} \\ \iint F_1 F_2 p_{22} dC_{21} dC_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + C_{11} - \frac{r_2 C_{12}}{2} \\ b + C_{12} - \frac{r_1 C_{11}}{2} \end{pmatrix}\right]
$$

如果设

$$
A = \frac{1}{2\left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2}{4}\right)^2\right]}\begin{pmatrix} 1 & \frac{r_1 + r_2}{4} \\ \frac{r_1 + r_2}{4} & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
B = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{r_1}{2} \\ \frac{r_2}{2} & \beta \end{pmatrix}
$$

$$C_1=\begin{pmatrix} a+C_{11}-\dfrac{r_2C_{12}}{2} \\ b+C_{12}-\dfrac{r_1C_{11}}{2}\end{pmatrix}$$

$$C_2=\begin{pmatrix} a+C_{21}-\dfrac{r_2C_{22}}{2} \\ b+C_{22}-\dfrac{r_1C_{21}}{2}\end{pmatrix}$$

于是两个企业的向量反应函数可写成:

$$\begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22}\end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12}\end{pmatrix}+AC_2 \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12}\end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix} \iint F_1(C_{21})F_2(C_{22})p_{21}\mathrm{d}C_{21}\mathrm{d}C_{22} \\ \iint F_1(C_{21})F_2(C_{22})p_{22}\mathrm{d}C_{21}\mathrm{d}C_{22}\end{pmatrix}+AC_1 \tag{3}$$

联立(2) 和(3) 两式, 计算可得多维贝叶斯均衡为

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12}\end{pmatrix}^*=[I-(AB)^2]^{-1}\left[ABA\begin{pmatrix} a+EC_{21}-\dfrac{r_2}{2}EC_{22} \\ b+EC_{22}-\dfrac{r_1}{2}EC_{21}\end{pmatrix}+AC_1\right] \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12}\end{pmatrix}^*=AB\left[[I-(AB)^2]^{-1}\left[ABA\begin{pmatrix} a+EC_{21}-\dfrac{r_2}{2}EC_{22} \\ b+EC_{22}-\dfrac{r_1}{2}EC_{21}\end{pmatrix}+AC_1\right]\right]+AC_2 \tag{5}$$

其中, I 代表单位阵; $EC_{21}=\int C_{21}F_1(C_{21})\mathrm{d}C_{21}$, $EC_{22}=\int C_{22}F_2(C_{22})\mathrm{d}C_{22}$, 显然它们分别是 C_{21} 和 C_{22} 的均值。如果我们知道产品之间的影响系数 r_1、r_2、α、β 和企业 1 两种产品的单位成本 C_{11} 和 C_{12} 及企业 2 的两种产品单位成本联合概率密度 $F(C_{21}, C_{22})$, 我们就可得到这两个企业在多维贝叶斯均衡下的最优价格策略。

3　单独博弈贝叶斯均衡策略与多维博弈贝叶斯均衡策略的最优性比较

在市场上, 当企业对存在一定替代性的两种(或多种) 产品进行博弈时, 是分别考虑每种产品价格策略单独进行博弈的均衡策略最优, 还是联合考虑两种产品价格策略进行多维博弈的均衡策略最优呢? 下面, 对这个问题进行分析

第一, 两个企业对产品 1 单独进行博弈, 企业 1 和 2 的利润函数分别为

$$U_1=U_1(p_{11},p_{12})=(a-p_{11}+\alpha p_{21})(p_{11}-C_{11}) \tag{6}$$

$$U_2=U_2(p_{11},p_{12})=(a-p_{21}+\alpha p_{11})(p_{21}-C_{21}) \tag{7}$$

对企业 2 的利润函数 U_2, 利用最优化一阶条件 $\partial U_2/\partial p_{21}=0$, 得到

$$\frac{\partial U_2}{\partial p_{21}}=-p_{21}+C_{21}+a-p_{21}+\alpha p_{11}=0$$

于是企业 2 的最优反应函数为

$$p_{21}=\frac{a+\alpha p_{11}+C_{21}}{2} \tag{8}$$

企业 1 关于产品 1 的期望利润 EU_1 为 $EU_1=\int F_1(C_{21})U_1dC_{21}$, 利用最优化一阶条件 $\partial U_1/\partial p_{11}=0$, 得到

$$\frac{\partial EU_1}{\partial p_{11}}=\int F_1(C_{21})(a-2p_{11}+\alpha p_{21}+C_{11})\mathrm{d}C_{21}=0$$

整理得到企业 1 关于产品 1 对企业 2 的最优反应函数为

$$p_{11}=\frac{a+\alpha\int F_1(C_{21})p_{21}\mathrm{d}C_{21}+C_{11}}{2} \tag{9}$$

联立(8) 和(9), 计算得到两个企业关于产品 1 的贝叶斯 Nash 均衡为

$$p_{11}^*=\frac{2a+a\alpha+\alpha EC_{21}+2C_{11}}{4-\alpha^2}$$

$$p_{21}^*=\frac{a+C_{21}}{2}+\frac{\alpha(2a+a\alpha+\alpha EC_{21}+2C_{11})}{2(4-\alpha^2)} \tag{10}$$

其中 $EC_{21}=\int C_{21}F_1(C_{21})\mathrm{d}C_{21}$。

第二, 两个企业对产品 2 单独进行博弈, 同理得到其贝叶斯 Nash 均衡为

$$p_{12}^*=\frac{2b+b\beta+\beta EC_{22}+2C_{12}}{4-\beta^2}$$

$$p_{22}^*=\frac{b+C_{22}}{2}+\frac{\beta(2b+b\beta+\beta EC_{22}+2C_{12})}{2(4-\beta^2)} \tag{11}$$

其中 $EC_{22}=\int C_{22}F_2(C_{22})\mathrm{d}C_{22}$。

将两个企业对产品 1 和 2 单独博弈的贝叶斯 Nash 均衡(10) 和(11) 代入总利润函数(1) 式中可分别得到在两种产品存在一定替代关系时两个企业单独对每种产品价格博弈的总利润。

不妨设 $a = 10, b = 12, \alpha = 0.4, \beta = 0.2, r_1 = 0.1, r_2 = 0.2$;企业1两种产品的实际单位成本为 $C_{11} = 1, C_{12} = 1.6$;企业2两种产品的实际单位成本为 $C_{21} = 0.8, C_{22} = 1.6$;企业2两种产品的单位成本分布均服从正态分布:$C_{21} \sim N(1,4), C_{22} \sim N(1.4,4)$。

在共同知识为企业1两种产品的单位成本和企业2两种产品的单位成本分布情况下,将参数值代入(4)和(5),得到两个企业进行多维博弈时在贝叶斯多维 Nash 均衡下的最优策略向量 $(p_{11}, p_{12})^{*T} = (8.1064, 8.7931)^T$,$(p_{21}, p_{22})^{*T} = (6.8649, 7.9068)^T$;相应的各自总利润为 $U_1^* = 84.1159$,$U_2^* = 90.0925$。

我们再将相同的参数值代入(10)和(11),计算得到两个企业关于产品1和2单独博弈时的贝叶斯 Nash 均衡分别为 $\{p_{11}, p_{21}\}^* = \{6.336, 6.667\}$ 和 $\{p_{12}, p_{22}\}^* = \{7.3854, 7.5385\}$。此时,在这两个贝叶斯 Nash 均衡条件下,两个企业的各自实际总利润分别为 $U_1^{**} = 80.7062$,$U_2^{**} = 81.7901$,且有 $U_1^{**} = 80.7062 < U_1^* = 84.1159$,$U_2^{**} = 81.7901 < U_2^* = 90.0925$。

得到的结果说明对具有一定替代关系的两种产品进行博弈时,两个企业单独对每种产品价格进行博弈时在均衡下的总利润小于联合考虑两种产品价格进行多维博弈时在均衡下的总利润。

4 结束语

上面,我们讨论了两个企业对两种产品具有一定替代关系的不完全信息 Bertrand 模型,并得到了对产品价格单独博弈的均衡策略劣于对产品价格进行多维博弈的均衡策略的结果。如果两种产品不存在替代关系时,多维博弈的贝叶斯多维 Nash 均衡等价于对两种产品单独博弈的贝叶斯 Nash 均衡的简单组合[1],换句话说,对不存在替代关系的两种产品进行多维博弈可以通过对每种产品进行单独博弈而得到,这时,进行多维博弈在均衡下各企业得到的总利润就等于对两种产品单独进行博弈在均衡下的各产品利润的和。对于具有一定替代关系的多种产品的多维博弈问题,我们以上所讨论的结果也是成立的。

参考文献:

[1] 谭德庆,胡培,等. Bertrand 双寡头多维博弈模型及均衡[J]. 西南交通大学学报, 2002, 6: 698- 702.

[2] 施锡铨. 博弈论[M]. 上海财经大学出版社, 2000: 289- 291.

[3] 张维迎, 博弈论与信息经济学[M]. 上海人民出版社, 1996: 49- 50.

[4] John. Nash, JR. Essays on Game Theory[M]. Edward Elgar Publishers, 1966.

[5] Reinhard Selten. Model of Strategic Rationality[M]. Kluwer Academic Publishers, 1988.

[6] Merterns, J. F. and S. Zamir. Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information[J]. International of Game Theory, 1985, 10: 619- 632.

[7] Harsanyi, J.. Games with Incomplete Information Played by Bayesian players. Management Science, 1967- 68, 14: 159- 182.

[8] Harsanyi, J.. Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points[J]. International Journal of Game Theory, 1973, 2: 1- 23.

[9] Drew Fudenberg and Jean Tirole. Game Theory[M]. Massachusetts Institute of Technology Press, 1991.

[10] 北京大学代数几何教研室编. 高等代数[M]. 人民教育出版社, 1987.

Multidimensional Bertrand Model with Incomplete Information and Its Analysis

TAN De-qing[1], LIU Guang-zhong[2]

(1. School of Economics & Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;

2. School of Business & Management, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: On the basis of reference[1], the paper further discusses the model of multidimensional static Bertrand game with incomplete information about two kinds of product with certain substitutive relationship between two enterprises and its multidimensional Bayesian equilibrium, then obtains the result that Bayesian equilibrium strategies in which two enterprises independently participate in game for every kind of product are inferior to Bayesian equilibrium strategies in which each enterprise considers two kinds of product joiutly to participate in the two-dimensional game.

Key words: multidimensional; substitutive relationship; information; Bayesian equilibrium