

美式认购期权最佳执行时间决策^①

刘思峰

(河南农业大学管理科学研究所 450002)

林 益

(美国宾州州立斯里波瑞·罗克大学数学系 PA 16057)

摘 要 期权最佳执行时间是一个十分复杂的问题,受到许多随机因素的影响,至今还没有得到很好地解决。本文运用马尔可夫转移概率,讨论了满足齐次性条件的平稳系统中美式认购期权的最佳执行时间决策问题。研究了几种常见概率分布的最佳执行时间集。定理3-6的结论,与期权交易市场的实际情况吻合较好。主要结果可以直接应用到股票、期货交易、工程项目投资决策以及国家重大科技、经济、政治、军事战略决策之中。

关键词 认购期权 最佳执行时间 决策模型

期权(option)理论近年来在西方发展较快。这种全新的金融理论已经对世界经济、政治和科学技术产生了极其深刻的影响。其应用已扩展到工程项目评估、投资决策、生产管理及军事、经济、政治、科技战略决策等众多领域。

期权亦称偶发性请求权,是一种衍生的金融工具。实质上它是一份合约,根据合约规定,一个美式认购期权(call option)或认沽期权(put option)持有者可在某一时期中的任一时刻按照约定的价格买进或卖出一份股票。例如,当合约规定一个认购期权持有者可在3个月内按每股20元的价格买进某种股票时,如果在此期间该股票市场价格下降或低于20元,他可以不执行该项期权;如果该股票市场价格上升并高于20元,他就可以通过执行期权而获得一定收益。同时,期权持有者还可以根据市场变化随时决定是否卖出自己所持有的期权以减少损失或增大收益。

期权理论研究的主要内容一是期权评价问题,即要取得按照合约规定的价格买进或卖出某种股票的权利应当付出多少代价;二是最佳执行时间问题,即期权持有者在什么时候执行期权收益最大。并于期权评价问题,研究成果较多。1973年,Black和Scholes给出的期权评价模型(BSOPM),被认为是20年来金融经济的最重要成果。此后,Cox,Ross,Rubinstein,Geske,Fisher以及Margrabe等人又在BSOPM的基础上做了进一步的研究。关于最佳执行时间问题,已经证明一个基础股票不分红利的美式认购期权的最佳执行时间为到期日。1977年,Roll又进一步证明了基础股票分红的美式认购期权的最佳执行时间可能在到期日之前。另外,泽木滕茂和生田诚三也做过一些研究。但期权最佳执行时间是一个十分复杂的问题,受到许多随机因素的影响,至今还没有得到很好地解决。本文试图运用马尔柯夫转移概率,讨论满足齐次性条件的平稳系统中美式认购期权的最佳执行时间问题。

记 S 为股票市场价格, X 为期权合约规定的股票执行价格, T 为期权截止日期, r 为无风险

① 本文1996年12月19日收到,为国家自然科学基金,渤海首批杰出青年科学基金资助项目。

利率, σ^2 为股票回报方差, C 为认购期权的价格。一般认为, 认购期权的价格为前述各种因素的函数, 即

$$C=f(S,X,T,r,\sigma^2)$$

且满足

$$\frac{\partial C}{\partial S} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial X} < 0, \quad \frac{\partial C}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} > 0$$

因为当股票价格 S 上升时, S 与约定执行价格 X 的差价增大, 期权的价值也随之增大; 相反地, 当 X 提高时, S 与 X 的差价减小, 期权的价值也相应减小; 截止时间 T 和价格方差 σ^2 越大, 行使期权的机会越大, 期权价格也增大; 无风险利率 r 提高, 作为一种风险合约, 期权价格也会相应提高。

我们根据 $[0, T]$ 时期中 S, X, r, σ^2, C 等诸种因素的变化情况将系统划分为 n 种不同的状态, 得到状态空间 I 。

$$I=\{1, 2, \cdots, n\}$$

为讨论简便起见, 先作如下假设:

假设 1: 期权持有者在 $[0, T]$ 中只作执行期权或继续等待两种选择 (不出卖期权)。

假设 2: $[0, T]$ 时期中无风险债券利率不变。

假设 3: 期权执行后所得收益立即转向无风险债券投资。

在上述假设下, 定理 1 显然成立。

定理 1: 若期权持有者在状态 $i \in I$ 执行期权, 则他到期末 T 所得收益 $R(i)$ 为

$$R(i) = (S(i) - X)e^{r(T-t)} \quad (1)$$

其中 $S(i)$ 为状态 i 的股票市场价, t 为与 i 相应的时间。

定理 2: 对任意的 $i, j \in I$, 设 $P_{ij}^{(m)}$ 为系统处于状态 i 时经 m 步转移到状态 j 的概率, q_m 为在 i 状态出现之后第 m 步执行期权的概率, 则期权持有者在状态 i 不执行期权的期末期望收益 $R(\bar{i})$ 为

$$R(\bar{i}) = \sum_{m=1}^n q_m \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(m)} R(j) \quad (2)$$

证: 期权持有者在状态 i 不执行期权, 下一步系统可能转向任一状态 $j \in I$ 。因此他在下一步执行期权时的期末期望收益 $R^{(1)}(\bar{i})$ 为

$$R^{(1)}(\bar{i}) = \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(1)} R(j)$$

同样, 他在此后第二步执行期权时的期末期望收益 $R^{(2)}(\bar{i})$ 为

$$R^{(2)}(\bar{i}) = \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(2)} R(j)$$

在此后第 m 步执行期权时的期末期望收益 $R^{(m)}(\bar{i})$ 为

$$R^{(m)}(\bar{i}) = \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(m)} R(j), \quad m=1, 2, \cdots$$

从而

$$R(\bar{i}) = \sum_{m=1}^n a_m R^{(m)}(\bar{i}) = \sum_{m=1}^n q_m \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(m)} R(j)$$

构造集合 I^*

$$I^* = \{i | R(i) \geq R(\bar{i})\} \quad (3)$$

显然, 当 $i \in i^*$ 时, $R(i) < R(\bar{i})$ 在状态 i 不执行期权, 期末收益有可能高于在状态 i 执行期权的期末收益。当 $i \in I^*$ 时, 在状态 i 执行期权为最佳选择, 状态 i 首次出现的时间即为最佳执行时间。事实上, 若状态 i 在 $t_1, t_2 \in T$ 各出现一次, 且 $t_1 < t_2$, 则 $T - t_1 > T - t_2$, 从而

$$(S(i) - X)e^{r(T-t_1)} > (S(i) - X)e^{r(T-t_2)}$$

故应在 t_1 执行期权。

以下对于几种常见的概率分布导出一些有趣的结果。

定理 3: 设观望次数 m 服从几何分布, 即存在 $0 \leq P \leq 1, q = 1 - p$, 使 $q_m = pq^{m-1}, m = 1, 2, \dots$, 则有

(1) 当 $\forall m, R^{(m)}(\bar{i}) = R$ (常数) 时, 期权最佳执行时间集为不等式 $Re^n \leq (S(i) - X)e^{rT}$ 的解集;

(2) 当 $\forall m, R^{(m)}(\bar{i}) = d^m e^n$ 时, 期权最佳执行时间集为不等式 $\frac{pd}{1-qd} e^{r(\tau+n)} \leq (S(i) - X)e^n$ 的解集。

$$\text{证: (1) } R(\bar{i}) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m R^{(m)}(\bar{i}) = \sum_{m=1}^{\infty} p R q^{m-1} = p R \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = R$$

将 $R(\bar{i})$ 代入 (3), 即得 $R(i) \geq R(\bar{i})$ 等价于

$$Re^n \leq (S(i) - X)e^n \quad (4)$$

$$(2) \quad R(\bar{i}) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m R^{(m)}(\bar{i}) = \sum_{m=1}^{\infty} p q^{m-1} \cdot d^m e^n = p d e^n \sum_{m=1}^{\infty} (qd)^{m-1} = \frac{pd}{1-qd} e^n$$

故此时 $R(i) \geq R(\bar{i})$ 等价于

$$\frac{pd}{1-qd} e^{r(\tau+n)} \leq (S(i) - X)e^n \quad (5)$$

定理 4 设观望次数 m 服从泊松分布, 即存在 λ , 使 $q_m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, m = 0, 1, 2, \dots$, 则有

(1) 当 $\forall m, R^{(m)}(\bar{i}) = R$ (常数) 时, 期权最佳执行时间集与不等式 (4) 的解集相同;

(2) 当 $\forall m, R^{(m)}(\bar{i}) = m e^n$ 时, 期权最佳执行时间集由不等式 (6) 给出

$$\lambda e^{r(\tau+n)} \leq (S(i) - X)e^n \quad (6)$$

证: (略)

定理 5: 设观望次数 m 服从二项分布 $B(n, p)$, 其中 n 为状态数, $0 \leq P \leq 1$, 则有

(1) 当 $\forall m, R^{(m)}(\bar{i}) = R$ (常数) 时, 期权最佳执行时间集与不等式 (4) 的解集相同;

(2) 当 $\forall m, R^{(m)}(\bar{i}) = m e^n$ 时, 期权最佳执行时间集由不等式 (7) 给出。

$$n p e^{r(\tau+n)} \leq (S(i) - X)e^n \quad (7)$$

证: (略)。

定理 6: 设期权持有者每种状态仅观察 1 次, 且在状态 i 执行期权的概率等于该状态的初始平稳分布概率 $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。则期权最佳执行时间集由不等式 (8) 给出

$$E(R(i))e^n \leq (S(i) - X)e^{rT} \quad (8)$$

其中 $E(R(j))$ 为在各个状态执行期权时期末收益的数学期望。

$$\text{证: } R(i) = \sum_{j=1}^n p_j R^{(m)}(i) = \sum_{j=1}^n p_j \sum_{i=1}^n p_{ij}^{(m)} R(j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}^{(m)} R(j) = \sum_{j=1}^n p_j R(j) = E(R(j))$$

代入 (3) 即得 (8)。

在实际操作中, 观望次数及其概率分布的确定是一大难题。本文的结果属于初步尝试。定理 3 至定理 6 在几种典型概率分布下导出了一个一致的结论: 如果在状态 i 执行期权的收益大于期望收益, 状态 i 首次出现的时间即为最佳执行时间。其直观解释是: 一旦出现期权持有者认为比较理想的状态, 就立即执行期权。这一结果与期权交易市场的实际情况是吻合的。

参考文献

- (1) Thomas E. Copeland, J. Fred Weston. Financial Theory and Corporate Policy. Third Edition. 1992.
- (2) Black, Fischer and Myron Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy. 81: pp. 637-654, 1973
- (3) Cox, John C., Stephen A. Ross, and Mark Rubinstein, Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics. 7:pp. 229-263. 1979
- (4) Geske, Robert. Pricing of Options with Stochastic Dividend Yields. Journal of Finance. 33pp. 617-625, 1978
- (5) Fisher, Stan. Call Option Pricing When the Exercise Price Is Uncertain, and the Valuation of Index Bonds. Journal of Finance. 33:pp. 169-176, 1978
- (6) Margrabe, William. The Value of an Option to Exchange One Asset for Another. Journal of Finance. 33: pp. 177-198. 1978
- (7) Roll, Richard. An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends. Journal of Financial Economics. 5:pp. 251-258, 1977
- (8) 李楚霖. 优化数学讲义——及其经济学和企业应用. 北京: 商务印书馆, 1985
- (9) 泽木藤茂. ファイナンスにすける最適停止問題. オペレーションズ・リサーチ 1989(1).

Decision on the Optimum Exercise Time of an American Call Option

Liu Sifeng

(Management Science Research Institute, Henan Agricultural University, Zhengzhou 450002)

Lin yi

(Slippery Rock University of Pennsylvania, Department of Mathematics)

Abstract: Optimum exercise time of an option is a very complicated matter. It is affected by many stochastic factors and so far have not been completely solved. In this paper, we discuss the optimum exercise time of an American call option by Markov transition probabilities under the supposition that stationary and uniform condition were satisfied. Sets of optimum exercise time about some common probability models have been studied. The conclusion in the theorem 3-6 can fairly suit to the actual situation of the option exchange market. The main conclusion could be directly applied to stock and future exchange, project investment decision and some significant state strategic decision on science and technology, economy, political and military affairs and so on.

Key words: Call option, Optimum exercise time, Decision model